Отчет об исследовательской работе.

Название работы. Новые доказательства формул Гийеры-Сера-Сондоу.

Автор. Василий Сергеевич Болбачан.

Адрес. г. Ставрополь ул.Ленина 328/15 кв 66. Муниципальная обще образовательная школа с углубленнм изучением отдельных предметов номер 6.

e-mail: `ys93@bk.ru`.

Телефон. 8 961 460 90 02

0. Постановка задачи.

Я хотел для произвольной функции $f(z)$ найти разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ln(k+z), \qquad (1)$$

где a_k некоторые коэффициенты. К сожалению эта задача оказалась слишком сложной, поэтому я стал исследовать разложения вида

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_{k;m} \ln(z+k),$$

где $a_{k;m}$ некоторые коэффициенты. Назовем такие разложения *логарифмическими рядами.* Исследованию этих рядов и посвящена эта работа. Именно логарифмическими рядами, а не рядами вида (1), интересовались другие математики (см. [Se26], [So03], [So05]).

Основной результат заключается в новых доказательствах разложений некоторых функций в логарифмические ряды. Кроме того у меня есть гипотеза, что для тригонометрических функций таких разложений не существует.

В математике и приложениях часто возникает так называемая постоянная Эйлера γ, по определению равная

$$\gamma = \lim_{m\to\infty} H_m - \ln m,$$

где $H_m = 1 + 1/2 + \cdots + 1/m$ — гармонические числа. По аналогии можно определить числа γ_n следующим образом

$$\gamma_n = \lim_{m\to\infty} \left(H_m - \frac{1}{n} \ln \left[\binom{m+n}{n} \right] \right)$$

Одним из главных результатов является формула для этих чисел.

1. Основные результаты.

Теорема 1. Если $\Re(z) > 0$, то

$$1 = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{kz+1}.$$

Замечание 2. Если $\Re(z) > 0$, то

$$z = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \ln(kz+1) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{m} \ln(kz+1).$$

Из доказательства Теоремы 1 следует, что для любого z_0, $\Re(z_0) > 0$ сходимость в Теореме 1 равномерна на отрезке начало которого совпадает с началом координат, а конец с точкой z_0. Следовательно, первая формула замечания 2 получается (комплексным) интегрированием формулы теоремы 1. Доказательство второй формулы замечания 2 приведено ниже. Если $\Im z = 0$ то вторая формула замечания 2 [GS06, Theorem 5.3]. Смотрите так же [GS08].

Положив $u = 1$, во второй формуле Замечания 2, мы получим:

$$e = \left(\frac{1}{1}\right)^{1/1} \left(\frac{2^2}{1\cdot 3}\right)^{1/2} \left(\frac{2^3\cdot 4}{1\cdot 3^3}\right)^{1/3} \left(\frac{2^4\cdot 4^4}{1\cdot 3^6\cdot 5}\right)^{1/4} \cdots$$

Эта формула была впервые получена в [So05]

Следствие 3. *Для действительных* $u>0$

$$u=\lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}(k+u)^{\binom{m}{k}(-1)^{k+1}}=\prod_{m=0}^{\infty}\left(\prod_{k=0}^{m}(k+u+1)^{\binom{m}{k}(-1)^{k}}\right).$$

Положим, последовательно $u=1,2,3$ во второй формуле Следствия 3

$$1=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{128}{135}\ldots,2=\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{125}{128}\ldots,3=\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{864}{875}\ldots.$$

Определим числа γ_n следующим образом

$$\gamma_n=\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{1/j}\frac{dx}{(nx)^{-1}+1}=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n}{j}\right)\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\ln\left[\binom{m+n}{n}\right]\right)$$

Например γ_1 это постоянная Эйлера.

Теорема 4.

$$\gamma_n=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^k}{nk}\ln\left(\frac{k!}{n!}\right).$$

Используя эту формулу мы также получим

Следствие 5.

$$\gamma=\gamma_1=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{j}\binom{j-1}{i-1}\frac{(-1)^i}{j}\ln i.$$

Доказательство этой формулы в [Se26] использует аналитическое продолжение дзета-функции Римана. Приводимое доказательство короче приведенных в [So03], см. [So03, remark before Proof 1].

Экспоненцируя формулу следствия 5, мы получим:

$$e^{\gamma}=\left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}\left(\frac{2^2}{1\cdot 3}\right)^{1/3}\left(\frac{2^3\cdot 4}{1\cdot 3^3}\right)^{1/4}\left(\frac{2^4\cdot 4^4}{1\cdot 3^6\cdot 5}\right)^{1/5}\ldots$$

Гипотезы.

Перечислю близкие проблемы, по котрым имеются идеи, но пока нет значительных результатов.

1. Для действительных положительных чисел z_1,z_2

$$z_1z_2=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\ln(1+z_1\ln(1+kz_2)).$$

2. Для действительных $z\ge 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{(n!)^2}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\binom{m}{n}\frac{(-1)^{n+1}}{z(n+1)+1}.$$

3. $$\ln\frac{2}{\pi}=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{2^{n-1}}{n}}\ln\frac{k!!}{(k-1)!!}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2^n}\left(\frac{2}{k}-\frac{2}{j}-\frac{j}{k}+2\right)\ln\frac{k!!}{(k-1)!!}.$$

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{1/4} \left(\frac{2^3 4^2}{3^2}\right)^{1/16} \left(\frac{2^9 4^5 8^3}{3^7 9^3}\right)^{1/48} \left(\frac{2^{21} 4^{17} 16^9}{3^6 9^{12} 27^5 5^4}\right)^{1/128} \cdots$$

Здесь $k!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (k-2) \cdot k$ для нечетного k и $k!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (k-2) \cdot k$, для четного k . Смотрите также [So05].

4. Модифицированная гипотеза И.Шнурникова (см. подробнее [Sk09]).

Пусть на плоскости выбрана система координат xOy. Обозначим для точки $M(x;y)$ плоскости через $M_x := x, M_y := y$. Назовем последовательность точек $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *пополненной молнией* если $(a_{2n})_x = (a_{2n+1})_x, (a_{2n-1})_y = (a_{2n})_y$ и $a_n \to (0;0)$ при $n \to \infty$. Тогда для того, чтобы непрерывная дифференцируемая на пополненной молнии $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ функция $f : \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \to \mathbb{R}$ представлялась в виде $f(a_n) = g((a_n)_x) + h((a_n)_y)$, где $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ некоторые непрерывные дифференцируемые функции, необходимо и достаточно чтобы последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty} |a_k|}{(a_n)_x}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty} |a_k|}{(a_n)_y}$$

были ограниченными.

При помощи редукции свойства дифференцируемости базисности к утверждению о рядах с вещественными слагаемыми я надеюсь доказать достаточность в этой гипотезе.

5. Н.Г. Мощевитин поставил такую задачу: верно ли, что для любого простого числа p существует натуральное число $a < p$ такое, что все коэффициенты разложения a/p в непрерывную дробь не больше 3? (См. Приложение 1.) У меня есть идея решения этой задачи, связанная с асимптотикой количества дробей, обладающих этим свойством.

Доказательства.

Для доказательства Теоремы 1 и Теоремы 4, нам понадобится

Лемма 7. *Для любых* $z \neq 0, -1, -2, \dots$ *и* $m = 1, 2, 3...$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{(-1)^k}{k+z} = \frac{g_m(z)}{z} \quad \text{где} \quad g_m(z) := \frac{m!}{\prod\limits_{k=1}^{m}(z+k)}.$$

Доказательство этого несложного факта может быть найдено в [Ro06, стр. 216, формула (5.41) в русском переводе].

Лемма 8. Если $\Re(z) > 0$ то выражение $g_m(z)/z$ сходится к 0 равномерно на луче с вершиной z_0 и направляющим вектором z_0 при m стремящимся к бесконечности.

Доказательство. Имеем

$$\left|\frac{g_m(z)}{z}\right| = \left|\frac{m!}{\prod\limits_{k=1}^{m}(z+k)}\right| = \frac{1}{|z| \prod\limits_{k=1}^{m}\left|1+\frac{z}{k}\right|} < \frac{1}{|z| \prod\limits_{k=1}^{m} \Re\left(1+\frac{z}{k}\right)} =$$

$$= \frac{1}{|z| \prod\limits_{k=1}^{m}\left(1+\frac{\Re(z)}{k}\right)} < \frac{1}{|z|\Re(z) \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{k}} \underset{m\to\infty}{\to} 0$$

Доказательство Теоремы 1. Из Леммы 3.1 и Леммы 3.2 следует, что

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^k}{k+z}=0.$$

Заменив z на $\frac{1}{z}$ и поменяв предел суммирования, мы получим

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{ku+1}=1.$$

Для доказательства Теоремы 4, нам понадобится
Лемма 9.

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{\binom{m+k}{k}^{t/k}}{\prod\limits_{n=1}^{m}\left(1+\frac{t}{n}\right)}\right]=\frac{t!}{(k!)^{t/k}}$$

Доказательство. Так как

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m^t}{\prod\limits_{n=1}^{m}\left(1+\dfrac{t}{n}\right)}=\lim_{m\to\infty}\frac{m^t m!t!}{(m+t)!}=t!\lim_{m\to\infty}\frac{m^t}{(m+1)(m+2)\ldots(m+t)}=t!$$

То осталось доказать, что

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{\binom{m+k}{k}^{t/k}}{m^t}\right]=\frac{1}{(k!)^{t/k}}$$

Возведем обе части в степень k/t получим

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{\binom{m+k}{k}}{m^k}\right]=\frac{1}{k!}$$

Последнее верно т.к.

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{\binom{m+k}{k}}{m^k}\right]=\lim_{m\to\infty}\frac{m(m+1)\ldots(m+k-1)}{k!m^k}=\frac{1}{k!}$$

Доказательство Теоремы 4 Докажем, что

$$\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{kn}\ln\left(\frac{k!^n}{n!^k}\right)\overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=}\lim_{t\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k+1}\ln\left(\binom{t+n}{n}^{1/n}\right)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\ln\left(1+\frac{k}{j}\right)\right)\overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=}\lim_{t\to\infty}\left(\ln\left(\binom{t+n}{n}^{1/n}\right)-\sum_{j=1}^{t}\frac{1}{j}\right)+\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{1/j}g_m(1/u)du\overset{(3)}{=}-\gamma_n+\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{1/j}g_m(1/u)du\overset{(*)}{\to}-\gamma_n$$

При $m\to\infty$.

Первое равенство следует из Леммы 9 Докажем второе равенство. Положив $z = \frac{1}{u}$ в Лемме 7 и поменяв предел суммирования, получим

$$1 - \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{ku+1} = g_m(1/u).$$

Следовательно (несобственно) интегрируя эту формулу от 0 до $1/j$, мы получим

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \ln\left(1 + \frac{k}{j}\right) = \frac{1}{j} - \int_{0}^{1/j} g_m(1/u)du.$$

Это и то, что $\sum\limits_{k=1}^{m} \binom{m}{k}(-1)^{k+1} = 1$ доказывает второе равенство.

Третье равенство очевидно.

Докажем (*). Имеем

$$0 < g_m(1/u) < \frac{g_{m-1}(1/u)}{1 + \frac{1}{m}} \quad \text{for} \quad 0 < u \leq 1.$$

Следовательно

$$0 < g_m(1/u) \leq \frac{g_1(1/u)}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})...(1+\frac{1}{m})} = \frac{2g_1(1/u)}{m+1} \quad \text{for} \quad 0 < u \leq 1.$$

Для любого m ряд в левой части (*) сходится по теореме о сумме пределов. Следовательно для сумм S_m в левой части (*) имеем

$$0 < S_m < \frac{2S_1}{m+1} \overset{m\to\infty}{\to} 0.$$

Для доказательства Замечания 2, Следствия 3 и Следствие 5 нам понадобится

Лемма 10.

$$\frac{\binom{m}{k}}{k} = \sum_{n=k}^{m} \frac{\binom{n}{k}}{n}.$$

Эта лемма, как и Лемма 11 не является новой, (см. например [Wi09])

Доказательство. Имеем

$$\binom{m}{k} = \sum_{n=1}^{m-k+1} \binom{m-n}{k-1} = \sum_{n=k}^{m} \binom{n-1}{k-1} = k \sum_{n=k}^{m} \frac{\binom{n}{k}}{n}.$$

Здесь первое равенство верно, так как $\binom{m-n}{k-1}$ равно числу k - подмножеств $\{1, 2, \ldots, m\}$ чей минимальный элемент есть n, второе равенство верно, так как слогаемые в обоих суммах одни и те же.

Доказательство второй формулы Замечания 2. Используя Лемму 10, для $X_{n,k} = \binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{n} \ln(ku+1)$ имеем

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \ln(ku+1) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=k}^{m} X_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} X_{n,k}. \quad QED$$

Доказательство первой формулы Следствия 3. Докажем логарифмический вариант. Положив $z = \frac{1}{u}$ в первой формуле замечания 2, мы получим

$$\frac{1}{z} = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\ln\left(\frac{k}{z}+1\right).$$

По Лемме 8 предел (в Замечании 2) сходятся равномерно для $z \in [z_0; +\infty], z_0 \geq 0$. Следовательно интегрируя это равенство от 1 до u по z, мы получим

$$\ln u \overset{(1)}{=} \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(k\ln(k+u)-k+u\ln\left(\frac{k}{u}+1\right)\right) \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k+1}\ln(k+u) - \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k+1}+$$

$$+u\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\ln\left(\frac{k}{u}+1\right) \overset{(3)}{=} \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k+1}\ln(k+u).$$

Первое равенство верно, так как

$$\int_1^u \frac{dz}{z} = \ln u,$$

$$\int_1^u \ln(\frac{k}{z}+1)dz = (k+u)\ln(k+u) - k + u\ln u = k\ln(k+u) - k + u\ln\left(\frac{k}{u}+1\right)$$

Второе равенство очевидно. Третье равенство следует из первой формулы Замечания 2 и того, что

$$\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k+1} = 1. \quad QED.$$

Доказательство второй формулы следствия 3. Докажем логарифмический варинт. Используя Лемму 10, для $a_k = \ln(k+u)$ мы получим

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k+1}a_k = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=k}^{m}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}\frac{k}{n}a_k =$$

$$= \sum_{1\leq k\leq n<\infty}\binom{n-1}{k-1}(-1)^{k+1}a_k = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(-1)^{k+1}a_k =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}a_{k+1}. \quad QED$$

Для доказательства Следствия 5, нам понадобится

Лемма 11.

$$\sum_{k=n}^{j}(-1)^{k+n}\binom{j}{k} = \binom{j-1}{n-1}.$$

Доказательство. Докажем индукцией по n. База индукции при $n = 1$ очевидна.

Докажем шаг индукции. По правилу Паскаля, имеем:

$$\sum_{k=n+1}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{k+n} = \sum_{k=n}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{k+n} - \binom{j}{n} = \binom{j-1}{n-1} - \binom{j}{n} =$$

$$= \binom{j-1}{n}. \quad QED$$

Доказательство следствия 5.

$$\gamma \overset{(1)}{=} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \frac{(-1)^k}{k} \ln(k!) \overset{(2)}{=} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \left(\sum_{j=k}^{m} \binom{j}{k} \frac{1}{j} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{n=1}^{k} \ln n \right) \overset{(3)}{=} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=k}^{m} \sum_{n=1}^{k} a_{kjn} \overset{(4)}{=} \lim_{m\to\infty} \sum_{1\le n\le k\le j\le m} a_{kjn} \overset{(5)}{=}$$

$$\overset{(5)}{=} \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{j} \sum_{k=n}^{j} a_{kjn} \overset{(6)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{j} \frac{(-1)^n}{j} \binom{j-1}{n-1} \ln n.$$

Здесь $a_{kjn} = \binom{j}{k} \frac{(-1)^k}{j} \ln n$. Первое равенство следует из Теоремы 4. Второе равенство следует из Леммы 10. Третье, Четвертое и пятое равенство очевидны. Шестое равенство следует из Леммы 11. QED

Литература

[Ap09] A.I.Aptekarev, On linear forms containing the Euler constant. `http://arxiv.org/abs/0902.1768v2`

[Bo] V. Bolbachan, New proofs of some formulas of Guillera-Ser-Sondow,
http://arxiv.org/abs/0910.4048.

[GS06] J. Guillera and J. Sondow, Double integrals and infinite products for some classical constants via analytic continuations of Lerch's transcendent, Ramanujan Journal 16 (2008) 247-270. http://arxiv.org/abs/0506319.

[GS08] J. Guillera and J Sondow, Problem 11381, Amer. Math. Monthly 115 (2008) 665.

[Se26] J.Ser, Sur une expression de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Comptes Rendus 182 (1926) 1075-1077.

[So05] J. Sondow, A faster product for π and a new integral for $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$, Amer. Math. Monthly 112 (2005) 729-734. http://arxiv.org/abs/0401406

[So03] J. Sondow, An Infinite Product for e^{γ} via Hypergeometric Formulas for Euler's Constant γ.

http://arxiv.org/abs/0306008

[Ro06] R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science. Second Edition. [Имеется перевод: Конкретная математика. Основание информатики / Р.Грэхэм, Д.Кнут, О.Патанщик ; пер. с англ. - 3-е изд. - М. : Мир ; БИНОМ. Лаборотория знаний, 2009.]

[Wi08] http://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_coefficient